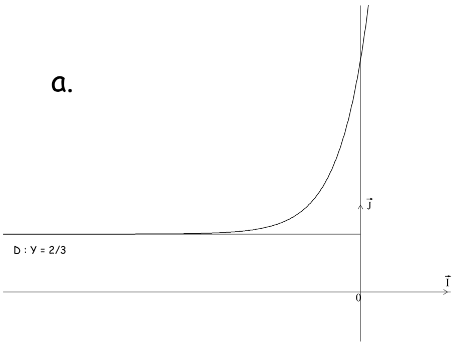
Lycée pilote Elkef | Devoir de synthèse №3 | $4^{ème}$M
Mai 2008 | Mathématiques | Durée 4^h

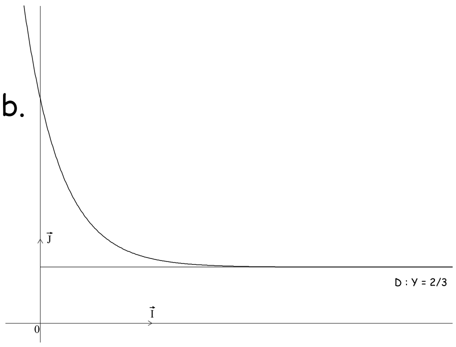
<u>Exercice 1 :</u> (3 points) :QCM

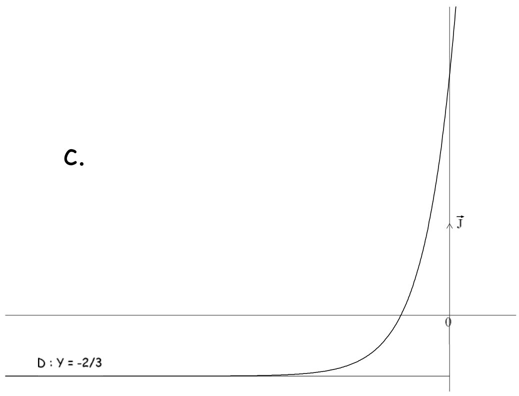
Pour chaque question, choisir la réponse exacte.

1) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' = -y - 2$ sont définies par :
   a. $y(x) = ke^{-x} - 2$ b. $y(x) = ke^{x} - 2$ c. $y(x) = ke^{-x} + 2$, ($k \in \mathbb{R}$).

2) Si f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3y - 2$ telle que $f(0) = \frac{8}{3}$ alors l'allure de la courbe de f est :

a.


b.


c.


3) Soit S la sphère de centre I(0,1,-2) et de rayon 3, P le plan d'équation $2x + 2y - z + 2 = 0$.
   Alors $S \cap P$ est :
   a. Un cercle   b. Un point   c. l'ensemble vide

4) On donne A(1,1,1) , B(0,2,1) et C(3,0,0) alors La distance du point C à la droite (AB) est :
   a. $\sqrt{\frac{3}{2}}$ b. $\frac{3}{2}$ c. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) On donne le plan P d'équation $x - z + 3 = 0$ et le vecteur $\vec{U}\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$, alors $t_{\vec{U}}(P)$ est le plan d'équation:
   a. $x + z + 2 = 0$ b. $x - z + 5 = 0$ c. $x + 2z + 5y - 1 = 0$

6) P est la loi uniforme sur [0,1] , alors $P\left(\left[\frac{1}{3},\frac{3}{5}\right]\right)$ est égale à :
   a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{4}{15}$ c. 0,3

Exercice 2 :(4 points)

Une entreprise de services d'une ville cherche à modéliser la consommation en milliers de dinars des Ménages sur les dernières années. Le tableau ci-dessous donne les résultats obtenus.

Année	1998	2000	2001	2002	2004
Rang de l'année x_i	1	3	4	5	7
Consommation y_i	28 ,5	35	52	70,5	100,5

1) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ associé à cette série statistique ; on prendra pour unités graphiques :
   1 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 000 dinars sur l'axe des ordonnées.
2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X , Y).
   Que peut-on conclure ?
3) a. Donner une équation de la droite Δ de régression de Y en X.
   b. Déterminer la consommation estimée des Ménages de cette ville en 2009.

Exercice 3 :(4 points)

Un quincaillier achète des ampoules à deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 70 % au premier fournisseur, 30 % au deuxième fournisseur.
Le premier fournisseur fabrique 97 % d'ampoules sans défaut, le deuxième fournisseur fabrique 95 % d'ampoules sans défaut.

1) On choisit une ampoule au hasard dans le stock. On note
   S l'événement « l'ampoule est défectueuse »,
   F_1 l'événement « l'ampoule provient du premier fournisseur »,
   F_2 l'événement « l'ampoule provient du deuxième fournisseur »
   a. Calculer $P(S/F_1)$, $P(S \cap F_1)$ et $P(S)$.
   b. Sachant que l'ampoule choisie est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne du premier fournisseur ?
2) On monte 12 ampoules sur un lustre. Calculer la probabilité qu'une ampoule au plus soit défectueuse.
3) La durée de vie en heures d'une ampoule, notée X, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2.10^{-5}$.
   a. Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure plus de 25 000 heures
   b. Quelle est la probabilité qu'une ampoule dure moins de 50 000 heures.

Exercice 4 : (3 points)

Soit $(o,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

1) Préciser les sommets et les asymptotes de l'hyperbole H d'équation réduite : $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

Construire H.

2) Pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) : $z^2-\frac{4}{\cos(\theta)}z+\frac{13}{\cos^2(\theta)}-9=0$.

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

b. Pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ on désigne par M_θ d'affixe $z=\frac{2}{\cos(\theta)}+3i\,tg(\theta)$.

Montrer que M_θ varie sur l'hyperbole H lorsque θ décit $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

3) Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de l' arc $\widehat{M_0M_{\frac{\pi}{3}}}$ de la courbe H autour de l'axe $(0,\vec{i})$. Montrer que $V = 24\pi$.

Exercice 5 : (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + x)e^{-2x}$ et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

I-

1) Etudier les variations de f.

2) Tracer (C).

II- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_0^n (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}dx$

1)a- Montrer que pour tout réel positif t on a : $1-t \le \frac{1}{1+t} \le 1$.

b- En déduire que pour tout réel positif x : $x-\frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$.

c- Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $x-\frac{x^2}{2n} \le n\ln(1+\frac{x}{n}) \le x$

Puis que $e^{x-\frac{x^2}{2n}} \le (1+\frac{x}{n})^n \le e^x$

d- Montrer alors que $\int_0^n e^{-x-\frac{x^2}{2n}}dx \le I_n \le 1-e^{-n}$.

2)a- Etudier le sens de variation de la fonction : $x \to e^{-x}+x-1$ sur $\mathbb{R}_+$.

En déduire que pour tout réel positif x : $1-x \le e^{-x}$.

b- En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $1-\frac{x^2}{2n} \le e^{-\frac{x^2}{2n}}$.

c. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $\int_0^n e^{-x-\frac{x^2}{2n}}dx \ge \int_0^n (e^{-x}-\frac{x^2}{2n}e^{-x})\,dx$

d- Calculer $\int_0^n x^2e^{-x}dx$, en déduire que : $I_n \ge 1-\frac{1}{n}+(\frac{1}{n}+\frac{n}{2})e^{-n}$.

Montrer alors que la suite (I_n) est convergente et calculer sa limite.